

TRAITEMENT DE LA COUCHE LIMITE THERMIQUE LAMINAIRE TRIDIMENSIONNELLE EN RÉGIME INSTATIONNAIRE COMPTE-TENU DE LA POUSSEE D'ARCHIMEDE

RADOMIR AŠKOVIĆ

Université Laval, Quebec, Canada

(Received 22 June 1970)

Résumé—Dans ce travail on traite de la couche limite thermique laminaire autour d'un corps en incidence, accéléré le long d'une trajectoire rectiligne. On se place dans le cas où les différences de température ne sont pas négligeables, de sorte qu'il est nécessaire de tenir compte de la poussée d'Archimède. Les équations de la couche limite sont interdépendantes; celles de la couche limite dynamique contiennent la température et inversement. On a donné d'abord une méthode d'approximations successives du traitement de ces équations dans le cas général. Ensuite, on étudie la couche limite thermique autour d'un obstacle fini uniformément accéléré.

NOTATIONS

s ,	longueur d'arc le long des lignes de courant extérieures;
z ,	longueur d'arc le long des trajectoires orthogonales des lignes de courant;
n ,	longueur d'arc le long des normales à la surface;
t ,	coordonnée temporelle;
$e_1(s, z)$,	mesure de la distance de lignes équipotentiels à la paroi;
$e_2(s, z)$,	mesure de la distance de lignes de courant pariétales de l'écoulement à potentiel;
$V(u, w, v)$,	vecteur-vitesse dont les composantes sont prises en direction de s, z, n ;
U ,	vitesse correspondante en régime stationnaire;
T ,	température absolue;
p ,	pression;
ρ ,	masse volumique;
μ ,	viscosité physique ($\nu = \mu/\rho$ viscosité cinématique);
P ,	nombre de Prandtl;
$\text{erf } \eta$,	fonction d'erreur de Gauss.

Indices

p ,	paroi;
e ,	extérieur;
∞ ,	infini amont.

1. INTRODUCTION

POUR des différences non négligeables de température, il faut tenir compte de la poussée d'Archimède comme force extérieure. Si β est le coefficient de dilatation de volume et $\theta_T = T - T_\infty$ l'augmentation de température d'une particule du fluide, on trouve comme modification relative du volume $\beta\theta_T$; d'où la forme de la poussée d'Archimède [1] par unité de volume $\rho g \beta \theta_T$ où g est le vecteur-accelération de la pesanteur avec les composantes (g_s, g_z, g_n) dans le système de coordonnées curvilignes (s, z, n), proposé par Hayes [2].

Dans le cadre de cet article [3] nous allons considérer les composantes g_s, g_z, g_n comme fonctions des variables s, z seulement. Vu l'épaisseur minime de la couche limite laminaire, une telle supposition semble acceptable.

Les équations de la couche limite laminaire tridimensionnelle d'un fluide à propriétés physiques ρ et μ constantes†, en régime instationnaire s'écrivent alors, après application du principe de prévalence généralisé [4], sous la forme suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g_s \beta \theta_T + v \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial s} + v \frac{\partial w}{\partial n} - \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} u^2 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g_z \beta \theta_T + v \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(e_2 u)}{\partial s} + e_2 \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \left\{ - \frac{\partial u_e}{\partial t} - u_e \frac{\partial u_e}{\partial s}, \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} u_e^2, 0 \right\}.$$

Avec l'abréviation

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

l'équation de l'énergie thermique, pour les cas de valeurs modérées de la vitesse extérieure (dissipation de chaleur négligeable par rapport à la conduction) prend la forme:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial s} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} + v \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\nu}{\mathcal{P}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial n^2} \quad (4)$$

Par convention, toutes les intégrations du système (1)–(4) seront exécutées le long des lignes-coordonnées, ce qui permet d'exprimer s et z en longueur d'arc.

2. METHODE DE RESOLUTION

Si l'on suppose que pour les premiers instants du mouvement tous les termes convectifs du système ont des valeurs très faibles par rapport aux autres termes, nous pouvons définir un procédé d'approximations successives pour la solution du système des équations (1)–(4);

Soit u_0, w_0, v_0, θ_0 une première approximation qui décrit les premiers instants du mouvement, u_1, w_1, v_1, θ_1 une deuxième approximations tenant compte de l'influence des termes, convectifs, u_i, w_i, v_i, θ_i des approximations ultérieures telles que les deuxièmes membres du système contiennent seulement des termes d'itérations précédentes déjà connus.

En introduisant donc dans le système (1)–(4) une décomposition en sommes à N termes.

$$u = \sum_{i=0}^N u_i, w = \sum_{i=0}^N w_i, v = \sum_{i=0}^N v_i, \theta = \sum_{i=0}^N \theta_i, \quad (5)$$

nous pouvons alors décomposer ce système d'équations en une succession de systèmes et de conditions aux limites:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2} = \frac{\partial u_e}{\partial t} + g_s \beta (T_p - T_\infty) \theta_0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial(e_2 u_0)}{\partial s} + e_2 \frac{\partial v_0}{\partial n} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} - v \frac{\partial w_0}{\partial n^2} = \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} (u_0^2 - u_e^2) + g_z \beta (T_p - T_\infty) \theta_0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial t} - \frac{\nu}{\mathcal{P}} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial n^2} = 0 \quad (9)$$

avec les conditions aux limites:

$$\left. \begin{aligned} u_0 = v_0 = w_0 = 0 \text{ pour } t = 0 \text{ et } n \geq 0, \\ u_0 = v_0 = w_0 = 0 \text{ pour } n = 0 \text{ et } t \geq 0, \\ u_0 = u_e(s, z, t), w_0 = 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty, \\ T_0 = T_p \text{ ou } \partial T_0 / \partial n = 0 \text{ pour } n = 0, \\ T_0 = T_\infty \text{ pour } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Le système suivant s'écrit:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial s} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial s} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} + g_s \beta (T_p - T_\infty) \theta_1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial(e_2 u_1)}{\partial s} + e_2 \frac{\partial v_1}{\partial n} = 0 \quad (12)$$

† Condition satisfaite pour l'air en bonne approximation dans un écoulement dont les vitesses ne dépassent pas 50 m/s tandis que les différences de température dans le fluide restent en dessous de 50°K environ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial t} - v \frac{\partial w_1}{\partial n^2} &= -(u_0 + u_1) \frac{\partial w_0}{\partial s} \\ &- (v_0 + v_1) \frac{\partial w_0}{\partial n} + \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} (2u_0 u_1 + u_1^2) \\ &\quad + g_s \beta (T_p - T_\infty) \theta_1 \quad (13) \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial n^2} &= -u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial s} - v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial n} - w_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \quad (14) \end{aligned}$$

avec les conditions :

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = w_1 = 0 \text{ pour } t = 0 \text{ et } n \geq 0, \\ u_1 &= v_1 = w_1 = 0 \text{ pour } n = 0 \text{ et } t \geq 0, \\ u_1 &= 0, w_1 = 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty, \\ T_1 &= 0 \text{ ou } \partial T_1 / \partial n = 0 \text{ pour } n = 0, T_1 = 0 \\ &\text{pour } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

On peut continuer ainsi pour u_i, v_i, w_i, θ_i ($i = 2, 3, 4, \dots$). Bien qu'une démonstration générale convergence de ce procédé pour $N \rightarrow \infty$ n'existe pas, on peut espérer que pour t suffisamment petit les termes u_1, u_2, \dots deviennent rapidement négligeables non seulement à cause de la petitesse des termes convectifs dont une petite erreur n'affectera que peu les deuxièmes membres, mais aussi en raison du choix des conditions aux limites, identiquement nulles à partir de u_1, v_1, w_1, T_1 .

Il sera donc, en général, déjà suffisant de s'arrêter après la première itération u_1, v_1, w_1, T_1 dont les conditions aux limites tiennent déjà compte des termes convectifs de l'écoulement à potentiel.

Toutes ces équations d'approximations particulières ont un caractère général; elles sont valables pour $u_e(s, z, t)$ quelconques si l'on interprète le système s, z, n comme à [4], avec la seule restriction $u_e(s, z, 0) = 0$ et pour n , importe quelles valeurs de P et de T .

3. CAS D'UN MOUVEMENT A ACCELERATION CONSTANTE

Nous limiterons nos considérations au cas $u_\infty = At^\alpha U_\infty, \alpha \geq 0$ pour lequel le système (s, z, n) coïncide avec celui de Hayes [2]. Les lignes de courant pariétales de l'écoulement à

potentiel sont indépendantes de t [5]; l'écoulement extérieur prend, en plus, la forme $u_e = At^\alpha U_e(s, z)$ où U_e est la solution de l'écoulement à potentiel correspondant au cas stationnaire.

Nous choisirons plus particulièrement ici $\alpha = 1$ (cas d'un mouvement à accélération constante suivant une trajectoire rectiligne d'un corps initialement au repos, ce qui permet, de plus, de poser $A = 1$) et $P = 1$.

On peut, d'ailleurs, résoudre, de la même façon, le problème avec α et P différent de l'unité.

Donc, on traitera ici le cas de l'accélération constante d'un corps quelconque, initialement au repos: $u_e = tU_e(s, z)$. Il est possible de trouver des solutions exacts pour les équations de première, de deuxième approximation et ainsi de suite. L'équation (9) admet, compte tenu des conditions :

$$\theta_0 = 1 \text{ pour } n = 0, \theta_0 = 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty,$$

la solution suivante :

$$\theta_0 = 1 - \operatorname{erf} \eta = X_0(\eta), \quad (16)$$

où

$$\eta = \frac{n}{2\sqrt{vt}}$$

L'équation (6) devient alors :

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2} = U_e(s, z) + g_s \beta (T_p - T_\infty) X_0. \quad (17)$$

La fonction

$$u_0 = tU_e(s, z) \zeta'_{01}(\eta) + tg_s \beta (T_p - T_\infty) \zeta'_{02}(\eta) \quad (18)$$

satisfait aux conditions correspondantes (10) si les facteurs inconnus $\zeta'_{01}(\eta)$ et $\zeta'_{02}(\eta)$ sont solutions des équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \zeta'''_{01} + 2\eta \zeta''_{01} - 4\zeta'_{01} &= -4, \\ \zeta'''_{01} + 2\eta \zeta''_{02} - 4\zeta'_{02} &= -4X_0(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{01}(0) &= \zeta'_{01}(0) = 0, \zeta'_{01}(\infty) = 1, \\ \zeta_{02}(0) &= \zeta'_{02}(0) = 0, \zeta'_{02}(\infty) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Comme solutions exactes on trouve :

$$\zeta_{01}(\eta) = \left(\frac{2}{3}\eta^3 + \eta\right) \operatorname{erf} \eta + \frac{2}{3\sqrt{\pi}} (\eta^2 + 1) e^{-\eta^2} - \frac{2}{3}\eta^3 - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \quad (21)$$

$$\zeta_{02}(\eta) = \frac{2}{3}\eta^3 (\operatorname{erf} \eta - 1) + \frac{1}{3\sqrt{\pi}} (2\eta^2 - 1) e^{-\eta^2} + \frac{1}{3\sqrt{\pi}}. \quad (22)$$

En utilisant l'équation de continuité (7) pour la détermination de v_0 , on obtient après intégration par rapport à n :

$$v_0 = -2t \sqrt{vt} \left[\left(\frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} U_e + \frac{\partial U_e}{\partial s} \right) \zeta_{01}(\eta) + \beta(T_p - T_\infty) \left(g_s + \frac{\partial g_s}{\partial s} \right) \zeta_{02}(\eta) \right]. \quad (23)$$

Si l'on introduit la valeur obtenue (18) de u_0 dans l'équation (8) on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_0}{\partial t} - v \frac{\partial^2 w_0}{\partial n^2} &= g_s \beta (T_p - T_\infty) x_0(\eta) + t^2 \\ &\left[\frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} U_e^2 (\zeta'_{01} - 1) + \frac{2}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. U_e g_s \beta (T_p - T_\infty) \zeta'_{01} \zeta'_{02} + \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} g_s^2 \beta^2 (T_p - T_\infty)^2 \zeta'^2_{02} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

En cherchant la solution de l'équation (24) sous la forme :

$$\begin{aligned} w_0 &= t g_s \beta (T_p - T_\infty) f_{01}(\eta) \\ &+ t^3 \left[\frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} U_e^2 f_{02}(\eta) + \frac{2}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} U_e g_s \beta (T_p - T_\infty) f_{03}(\eta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{e_1} \frac{\partial e_1}{\partial z} g_s^2 \beta^2 (T_p - T_\infty)^2 f_{04}(\eta) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

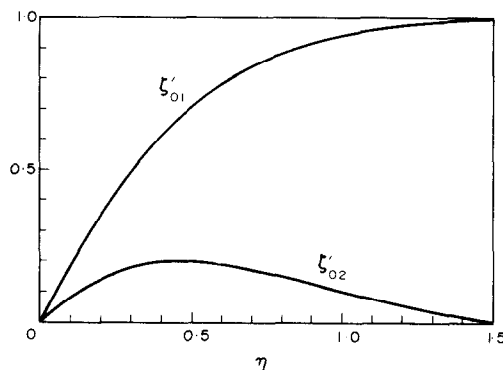


FIG. 1.

on obtiendra, pour les fonctions $f_{0i}(\eta)$ universelles, le système d'équations suivant :

$$\left. \begin{aligned} f''_{01} + 2\eta f'_{01} - 4f_{01} &= -4x_0, \\ f''_{02} + 2\eta f'_{02} - 12f_{02} &= 4(1 - \zeta'^2_{01}), \\ f''_{03} + 2\eta f'_{03} - 12f_{03} &= -4\zeta'_{01} \zeta'_{02}, \\ f''_{04} + 2\eta f'_{04} - 12f_{04} &= -4\zeta'^2_{02}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

avec les conditions :

$$f_{0i}(0) = f_{0i}(\infty) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (27)$$

Nous avons trouvé [3] les solutions exactes des équations différentielles (26) d'après les conditions aux limites (27) :

$$f_{01}(\eta) = 2\eta^2 (\operatorname{erf} \eta - 1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2},$$

$$\begin{aligned} f_{02}(\eta) &= \frac{5}{3} (1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \frac{8}{15}\eta^6) + \left(\frac{1024}{3\pi} - 896 \right) \left[\frac{1}{384} (1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \frac{8}{15}\eta^6) \right. \\ &\quad \left. (1 - \operatorname{erf} \eta) - \frac{1}{720\sqrt{\pi}} (\eta^5 + 7\eta^3 + \frac{33}{4}\eta) e^{-\eta^2} \right] - (2\eta^2 + \frac{8}{3}\eta^4 + \frac{8}{9}\eta^6) \operatorname{erf}^2 \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[\frac{8}{3\sqrt{\pi}} (\eta + \frac{5}{3}\eta^3 + \frac{2}{3}\eta^5) e^{-\eta^2} + 8\eta^4 + 14\eta^2 + \frac{7}{3} \right] \operatorname{erf} \eta - \frac{8}{g\pi} (1 + 2\eta^2 + \eta^4) e^{-2\eta^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \\
 & \quad (5\eta + 4\eta^3) e^{-\eta^2} + 4\eta^4 + 6\eta^2 + \frac{2}{3}, \\
 f_{03}(\eta) &= \frac{25}{24} (1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \frac{8}{15}\eta^6) - \left(\frac{512}{3\pi} + 784 \right) \left[\frac{1}{384} (1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \frac{8}{15}\eta^6) (1 - \operatorname{Erf} \eta) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{720\sqrt{\pi}} (\eta^5 + 7\eta^3 + \frac{33}{4}\eta) e^{-\eta^2} \right] + \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\eta^2 - \frac{1}{6}\eta^4 - \frac{5}{9}\eta^6 \right) \operatorname{erf}^2 \eta \\
 & \quad + \left[\frac{2}{3\sqrt{\pi}} (2\eta + \frac{1}{3}\eta^3 - \frac{5}{3}\eta^5) e^{-\eta^2} - 8\eta^4 - 13\eta^2 - \frac{13}{6} \right] \operatorname{erf} \eta + \frac{1}{9\pi} (4 + \frac{7}{2}\eta^2 - 5\eta^4) e^{-2\eta^2} \\
 & \quad - \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\frac{19}{2}\eta + 8\eta^3) e^{-\eta^2} + 4\eta^4 + 6\eta^2 + 1, \\
 f_{04}(\eta) &= \frac{5}{4} (1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \frac{8}{15}\eta^6) + \left(\frac{256}{\pi} - 864 \right) \left[\frac{1}{384} (1 + 6\eta^2 + 4\eta^4 + \frac{8}{15}\eta^6) \right. \\
 & \quad \left. (1 - \operatorname{Erf} \eta) - \frac{1}{720\sqrt{\pi}} (\eta^5 + 7\eta^3 + \frac{33}{4}\eta) e^{-\eta^2} \right] - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\eta^2 + \eta^4 + \frac{2}{3}\eta^6 \right) \operatorname{erf}^2 \eta \\
 & \quad - \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} (\eta + \frac{2}{3}\eta^3 + \frac{2}{3}\eta^5) e^{-\eta^2} + 8\eta^4 + 12\eta^2 + 2 \right] \operatorname{erf} \eta - \frac{1}{3\pi} (2 + \eta^2 + 2\eta^4) e^{-2\eta^2} \\
 & \quad - \frac{1}{\sqrt{\pi}} (9\eta + 8\eta^3) e^{-\eta^2} + 4\eta^4 + 6\eta^2 + 1.
 \end{aligned}$$

Les expressions (16), (18), (23) et (26) donc maintenant déterminent complètement la première approximation. En les introduisant dans l'équation (14), nous obtiendrons pour la deuxième approximation de température l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} - v \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial n^2} &= t \left[\left(\frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} U_e + \frac{\partial U_e}{\partial s} \right) \zeta_{01} x'_0 \right. \\
 & \quad \left. + \beta (T_p - T_\infty) \left(g_s + \frac{\partial g_s}{\partial s} \right) \zeta_{02} x'_0 \right]. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Pour en tirer des équations différentielles, nous présentons la solution sous forme :

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= t^2 \left[\left(\frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} U_e + \frac{\partial U_e}{\partial s} \right) x_{11}(\eta) \right. \\
 & \quad \left. \beta (T_p - T_\infty) \left(g_s + \frac{\partial g_s}{\partial s} \right) x_{12}(\eta) \right]. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, on trouve pour les fonctions $x_{11}(\eta)$ et $x_{12}(\eta)$ les équations :

$$x''_{11} + 2\eta x'_{11} - 8x_{11} = -4\zeta_{01}(\eta)x'_0(\eta), \quad (30)$$

$$x''_{12} + 2\eta x'_{12} - 8x_{12} = -4\zeta_{02}(\eta)x'_0(\eta), \quad (31)$$

avec les conditions :

$$\left. \begin{aligned} x_{11}(0) &= x_{11}(\infty) = 0, \\ x_{12}(0) &= x_{12}(\infty) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Il est également possible [5] de trouver les solutions analytiques des équations (30) et (31) d'après les conditions (32).

La température donc dans la couche limite thermique, d'après les solutions trouvés (16) et (29), peut être calculée de l'expression

Table 1.

η	ζ_{01}	ζ_{02}	f_{01}	$-f_{02}$	$-f_{03}$	f_{04}	x_0	$-x_{11}$	x_{12}
0.0400	0.0871	0.0420	0.0420	0.0428	0.0011	0.0009	0.9549	0.0059	0.00002
0.0800	0.1681	0.0780	0.0781	0.0800	0.0021	0.0019	0.9099	0.0118	0.00005
0.2006	0.3773	0.1549	0.1549	0.1631	0.0056	0.0046	0.7773	0.0301	0.0003
0.2818	0.4915	0.1836	0.1841	0.1999	0.0080	0.0061	0.6921	0.0425	0.0008
0.4895	0.7120	0.2004	0.2004	0.2477	0.0134	0.0076	0.4883	0.0710	0.0033
0.6190	0.8031	0.1837	0.1839	0.2576	0.0149	0.0071	0.3806	0.0836	0.0050
0.8001	0.8880	0.1459	0.1459	0.2626	0.0138	0.0053	0.2579	0.0914	0.0061
0.9946	0.9412	0.1026	0.1016	0.2569	0.0098	0.0032	0.1615	0.0868	0.0051
0.1527	0.9671	0.0710	0.0705	0.2387	0.0059	0.0019	0.1039	0.0755	0.0032
1.4500	0.9900	0.0303	0.0303	0.1465	0.0009	0.0005	0.0403	0.0474	0.00005
2.9444	0.9999	0.00007	0.00002	0.0030	0.00001	0.00001	0.00003	0.0001	0.00001

suivante :

$$\frac{T-T_\infty}{T_p-T_\infty} = X_0 \left(\frac{n}{2\sqrt{vt}} \right) + t^2 \left\{ \left[\frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} U_e(s, z) + \frac{\partial U_e}{\partial s} \right] X_{11} \left(\frac{n}{2\sqrt{vt}} \right) + \beta(T_p - T_\infty) \left[g_s(s, z) + \frac{\partial g_s}{\partial s} \right] X_{12} \left(\frac{n}{2\sqrt{vt}} \right) \right\}. \quad (33)$$

En connaissant θ_1 de l'expression (29), c'est à dire les fonctions universelles X_{11} et X_{12} , on peut établir l'équation (11) pour la deuxième approximation u_1 de la vitesse longitudinale dans la couche limite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2} = t^2 \left[U_e \frac{\partial U_e}{\partial s} (1 + \zeta_{01} \zeta_{01}'' - \zeta_{01}') \right. \\ + \frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} U_e^2 \zeta_{01} \zeta_{01}'' + g_s \beta(T_p - T_\infty) \frac{\partial U_e}{\partial s} \\ \times (\zeta_{01} \zeta_{02}'' - \zeta_{01}' \zeta_{02}' + X_{11}) + U_e \frac{\partial g_s}{\partial s} \\ \times \beta(T_p - T_\infty) (\zeta_{01}'' \zeta_{02} - \zeta_{01}' \zeta_{02}') \\ + U_e g_s \beta(T_p - T_\infty) \zeta_{01}'' \zeta_{02} \\ + \frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} U_e g_s \beta(T_p - T_\infty) (\zeta_{01} \zeta_{02}'' + X_{11}) \\ + g_s \frac{\partial g_s}{\partial s} \beta^2(T_p - T_\infty)^2 (\zeta_{02} \zeta_{02}'' - \zeta_{02}'^2 + X_{12}) \\ \left. + g_s^2 \beta^2(T_p - T_\infty)^2 (\zeta_{02} \zeta_{02}'' + X_{12}) \right]. \quad (34) \end{aligned}$$

Si l'on présente la solution de l'équation (34)

sous la forme :

$$\begin{aligned} u_1 = t^3 \left[U_e \frac{\partial U_e}{\partial s} \zeta_{11}'(\eta) + \frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} U_e^2 \zeta_{12}'(\eta) \right. \\ + g_s \beta(T_p - T_\infty) \frac{\partial U_e}{\partial s} \zeta_{13}'(\eta) + U_e \frac{\partial g_s}{\partial s} \\ \times \beta(T_p - T_\infty) \zeta_{14}'(\eta) + U_e g_s \beta(T_p - T_\infty) \zeta_{15}'(\eta) \\ + \frac{1}{e_2} \frac{\partial e_2}{\partial s} U_e g_s \beta(T_p - T_\infty) \zeta_{16}'(\eta) + g_s \frac{\partial g_s}{\partial s} \\ \times \beta^2(T_p - T_\infty)^2 \zeta_{17}'(\eta) + g_s^2 \beta^2 \\ \left. \times (T_p - T_\infty)^2 \zeta_{18}'(\eta) \right], \quad (35) \end{aligned}$$

avec l'opérateur $D = \frac{d^3}{d\eta^3} + 2\eta \frac{d^2}{d\eta^2} - 12 \frac{d}{d\eta}$ on en tire les équations suivantes pour les fonctions universelles inconnues :

$$\left. \begin{aligned} D(\zeta_{11}) &= -4(1 + \zeta_{01} \zeta_{01}'' - \zeta_{01}'^2) \\ D(\zeta_{12}) &= -4\zeta_{01} \zeta_{01}'' \\ D(\zeta_{13}) &= -4(\zeta_{01} \zeta_{02}'' - \zeta_{01}' \zeta_{02}') + X_{11} \\ D(\zeta_{14}) &= -4(\zeta_{01}'' \zeta_{02} - \zeta_{01}' \zeta_{02}') \\ D(\zeta_{15}) &= -4\zeta_{01}'' \zeta_{02} \\ D(\zeta_{16}) &= -4(\zeta_{01} \zeta_{02}'' + X_{11}) \\ D(\zeta_{17}) &= -4(\zeta_{02} \zeta_{02}'' - \zeta_{02}'^2 + X_{12}) \\ D(\zeta_{18}) &= -4(\zeta_{02} \zeta_{02}'' + X_{12}). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\zeta_{1i}(0) = \zeta_{1i}'(0) = 0, \quad \zeta_{1i}(\infty) \rightarrow 0,$$

pour $i = 1, 2, \dots, 8$.

On peut maintenant, facilement, calculer de l'équation (12) la composante v_1 , ainsi que la composante w_1 en utilisant l'équation (13).

Les équations différentielles (36) sont du même type que les équations (26), (30) et (31), déjà résolues analytiquement; il est donc possible de les résoudre de la même façon.

Les expressions qui en résultent sont très compliquées; il est préférable d'avoir recours à leur solution numérique à l'aide d'une machine électronique.

Voici, finalement, quelques résultats numériques. Le tableau ci-après donne quelques valeurs numériques des fonctions universelles (16), (21), (22), (26), (30) et (31), lesquelles sont aussi représentées sur les Figs. 1-3.

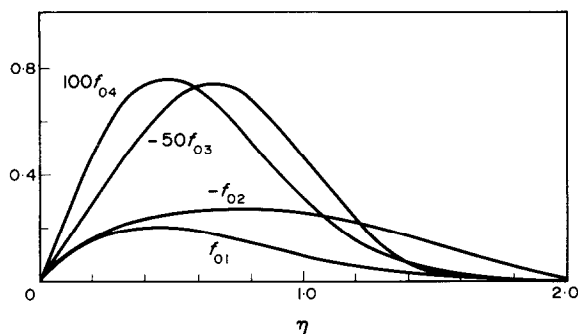


FIG. 2.

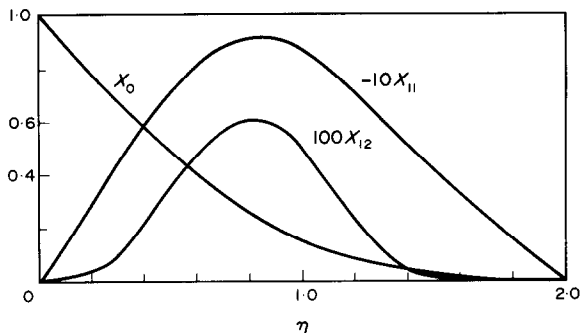


FIG. 3.

REMERCIEMENTS

Le calcul numérique des fonctions universelles a été réalisé au Centre de traitement de l'information de l'Université Laval. Mes remerciements sincères vont à Monsieur Nguyen Van Huong qui en a fait la programmation.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, 1st ed. chapter XIV, p. 248 (1955).
2. W. D. HAYES, The three-dimensional boundary layer, NAVORD Rep. 1313, Washington (1951).
3. R. AŠKOVIĆ, Traitement de la couche limite thermique tridimensionnelle en régime instationnaire compte-tenu de la poussée d'Archimède; présenté au Congrès Canadien de Mécanique Appliquée, Mai 1967, Québec, Canada.
4. E. A. EICHELBRENNER et R. AŠKOVIĆ, Sur une méthode approchée de traiter les couches limites laminares en régime instationnaire d'un écoulement en fluide incompressible à trois dimensions, *Journal de Mécanique*, Vol. 6, No 3 (1967).
5. R. AŠKOVIĆ, Etude de la couche limite laminaire tridimensionnelle en régime instationnaire, RAPPORT A-9 du Laboratoire d'Aérodynamique, Univ. Laval, Québec.

STUDY OF A NON-STATIONARY TRIDIMENSIONAL THERMAL BOUNDARY LAYER WITH BUOYANCY EFFECT

Abstract—An analysis is made of the thermal boundary layer on a body at constant incidence. The analysis includes the case of large temperature differences where it is necessary to include the buoyancy effect. The boundary layer equations are interrelated; the dynamic equations containing the temperature and vice-versa. These equations are first treated in the general case by successive approximations, and then, as a particular example, the thermal layer on a finite, uniformly accelerated body is studied.

STUDIE ÜBER EINE INSTATIONÄRE, DREIDIMENSIONALE THERMISCHE GRENZSCHICHT MIT AUFTRIEBSEFFEKTEN

Zusammenfassung—Es wird die thermische Grenzschicht an einem Körper bei konstanter Beeinflussung untersucht. Die Untersuchung schliesst den Fall grosser Temperaturdifferenzen ein, wo der Auftriebseffekt berücksichtigt werden muss. Die Grenzschichtgleichungen hängen in der Weise zusammen, dass die dynamischen Gleichungen die Temperatur enthalten und umgekehrt. Diese Gleichungen werden zuerst im allgemeinen Fall durch schrittweise Approximation gelöst, anschliessend wird als spezielles Beispiel, die thermische Grenzschicht eines endlichen, gleichförmig beschleunigten Körpers untersucht.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОГО ТЕПЛОВОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ ВЫТАЛКИВАЮЩЕЙ СИЛЫ

Аннотация—Проводится анализ теплового пограничного слоя на теле при постоянном угле атаки. Анализ включает случай значительных разностей температур, когда необходимо учитывать влияние выталкивающей силы. Уравнения теплового пограничного слоя взаимосвязаны, при чем динамические уравнения содержат температуру и наоборот. Эти уравнения сначала решаются в общем случае с помощью последовательных приближений, а затем рассматривается случай теплового пограничного слоя на теле конечных размеров с равномерным ускорением.